

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ

/ Заведующий кафедрой

В.В. Шайдуров / В.В. Шайдуров

« 16 » июня 2016 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**АНАЛИЗ ВЕЕРНЫХ ВОЛН,
ИМИТИРУЮЩИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИН СДВИГА**

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор

В.М. Садовский / В.М. Садовский
16.06.16

Выпускник

Кулаев / К.А. Кулаев
16.06.16

Красноярск 2016

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Анализ веерных волн, имитирующих распространение трещин сдвига» содержит 15 страниц текстового документа, 5 использованных источников.

ВЕЕРНЫЙ МЕХАНИЗМ, ВЕЕРНАЯ ВОЛНА, УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА, ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ, ДОМИНО-СТРУКТУРА.

Цели:

-разработка математической модели веерного механизма передачи вращательного движения в системе упруго связанных пластин на плоском основании, имитирующего распространение сдвиговых трещин в горной породе с аномально высокой хрупкостью;

-создание лабораторной физической модели, которая наглядно демонстрирует процесс распространения веерных волн.

В результате была создана физическая лабораторная модель, получены уравнения динамики вращательного движения пластин как механической системы с конечным числом степеней свободы.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Физическая лабораторная модель всепого механизма.....	6
2 Уравнения движения.....	9
Заключение	14
Список использованных источников	15

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с условием прочности Кулона-Мора (Рисунок 1), разрушение горной породы и образование сдвиговой трещины происходит тогда, когда кривая критерия прочности коснется внешнего круга Мора.

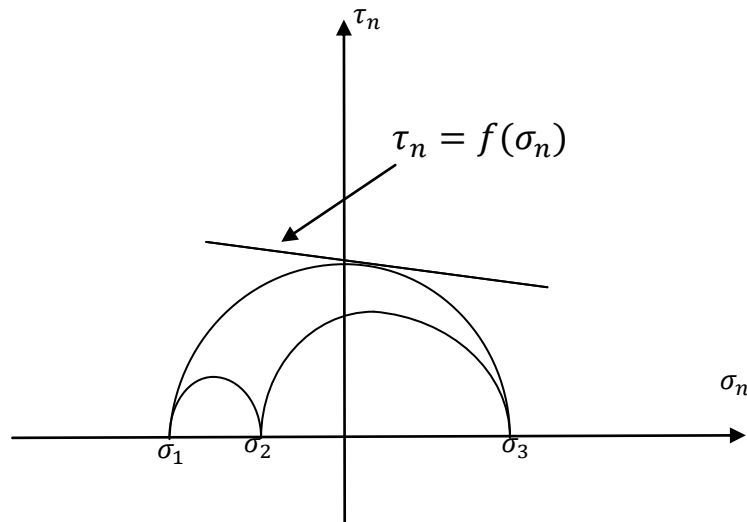


Рисунок 1 – Критерий прочности Кулона-Мора

Это условие записывается в виде

$$\tau_n = f(\sigma_n), \quad (1)$$

где τ_n – касательное напряжение;

σ_n – напряжение на площадке с нормалью n .

Оно достигается на площадке с углом наклона нормали β по отношению к оси, вдоль которой действует наибольшее нормальное напряжение:

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

где α – угловой коэффициент представленной кривой, то есть:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(\sigma_n). \quad (3)$$

Схематически процесс продвижения трещины представлен на Рисунке 2.

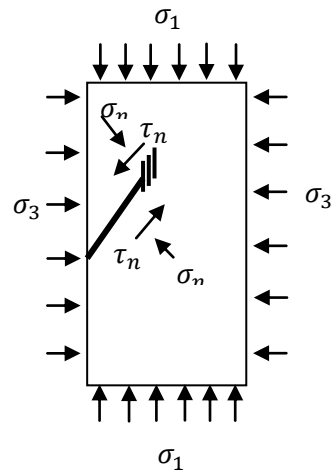


Рисунок 2 – Схема продвижения сдвиговой трещины

В действительности боковые напряжения запирают продвижение трещины, и в ее вершине появляется система наклонных микротрещин отрыва. Образуется веерная структура из параллельно расположенных домино-пластин небольшого размера (домино-блоков).

По общепринятому представлению [1] при сдвиге берегов трещины относительно друг друга домино-блоки подвергаются вращению. Это приводит к их разрушению и созданию трения. Рисунок 3 иллюстрирует такое поведение домино-блоков [1].

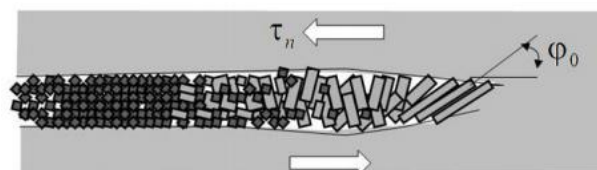


Рисунок 3 – Общепринятое представление «домино-структуры»

Недавние исследования, проведенные профессором Тарасовым [2-4] из Университета Западной Австралии, позволили выявить «неуловимый» механизм динамического разрушения, который при высоких давлениях активизируется в прочных горных породах. Особенность данного механизма состоит в том, что прочные домино-пластины сохраняют целостность при вращении (Рисунок 4) [2-3], вследствие чего снижается трение между сдвигающимися берегами трещины. Из-за неравномерности относительно сдвига берегов вращающиеся пластины образуют веер в голове трещины. Веер может перемещаться волнообразно с высокой скоростью, превосходящей скорость распространения упругих волн сдвига и очень малым сопротивлением, что делает породы суперхрупкими, а процесс разрушения – аномально бурным.

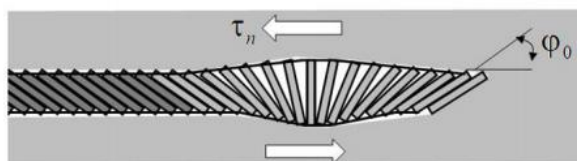


Рисунок 4 – Новое представление «домино-структуры»

Для наглядной иллюстрации этого процесса Тарасовым была разработана физическая лабораторная модель веерного механизма, которая дает возможность изучать его уникальные свойства.

В предлагаемой бакалаврской работе построена аналогичная физическая (лабораторная) модель и получены уравнения математической модели, в которых движение пластин веерной системы рассматривается как механическая система с n степенями свободы.

1 Физическая лабораторная модель веерного механизма

Лабораторная модель для детального исследования веерного механизма (Рисунки 6 и 7) представляет собой систему пластин на плоском основании (станине), соединенных упругими связями.

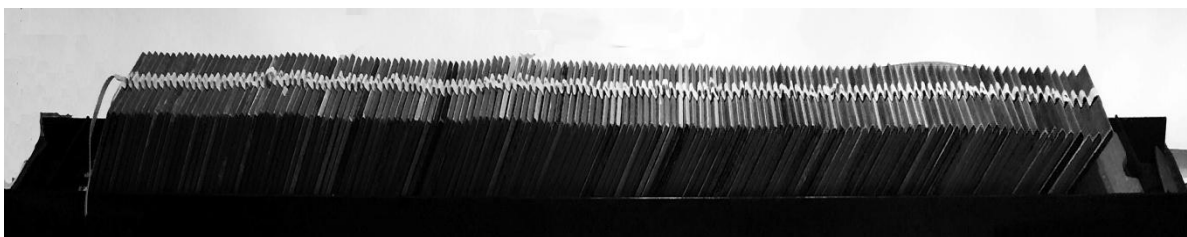


Рисунок 5 – Физическая лабораторная модель (вид спереди)



Рисунок 6 – Физическая лабораторная модель (вид сбоку)

Для создания данной лабораторной модели были использованы следующие материалы:

- Угловой алюминиевый профиль для станины (ширина- 35 мм, длина – 2000 мм, толщина – 3 мм) – 3 шт.;
- Кафельная плитка, имитирующая домино-пластины (ширина – 7 мм, длина - 98 мм, высота – 98 мм, масса – 140 г) – 150 шт.;
- Резинка, имитирующая блок горной породы, расположенной над трещиной (ширина – 5 мм, длина – 4000 мм);

- Жидкая резина TechWrap USA для создания сопротивления между пластинами – 4 баллончика;

- Виброизоляция STP Бимаст Super для создания трения– 1 лист.

Размеры станины: длина – 1600 мм, ширина – 113 мм, высота – 10 мм.

Размеры рабочей части: длина – 1465 мм, ширина – 113 мм, высота – 32 мм.

Общая масса установки – 22,6 кг.

На станине под углом $\varphi_0 = 40^\circ$ расположены 150 пластин. Веер формируется за счет принудительного поворота первой пластины (Рисунок 7).



Рисунок 7 – Демонстрация веера без наклона станины

Если угол наклона станины по отношению к горизонту $\approx 30^\circ$, то веер начинает двигаться самопроизвольно снизу вверх (Рисунок 8).

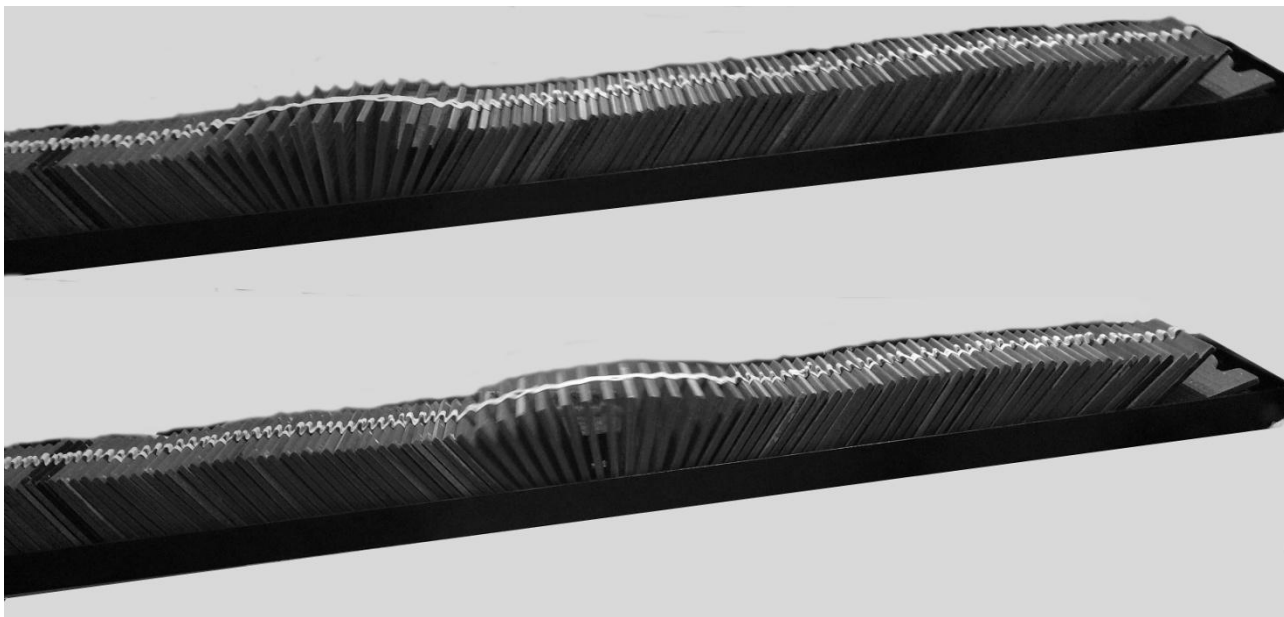


Рисунок 8 – Демонстрация веерного механизма

2 Уравнения движения

С точки зрения классической механики данная физическая лабораторная модель – это система, характеризующаяся n степенями свободы, поскольку имеется n независимых углов поворота пластин: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

При выводе уравнений движения воспользуемся Рисунком 9 и найдем расстояние между осями вращения по формуле

$$h = \frac{h_0}{\sin \varphi_0}, \quad (4)$$

где h_0 – толщина пластины;

φ_0 – начальный угол.

Квадрат расстояния между верхними концами пластин вычислим по формуле

$$s^2_{i+1/2} = (h + a(\cos \varphi_{i+1} - \cos \varphi_i))^2 + a^2(\sin \varphi_{i+1} - \sin \varphi_i)^2, \quad (5)$$

где h – то же, что и в формуле (4);

φ_i – угол поворота пластин;

a – высота пластины.

Найдем деформацию связи между соседними пластинами с номерами i и $i + 1$ по формуле

$$\varepsilon_{i+1/2} = (s^2_{i+1/2} - h^2)/(2h^2), \quad (6)$$

где $s_{i+1/2}$, h – то же, что и в формуле (5).

Обозначим $\dot{\varphi}_i$ угловую скорость, которая вычисляется по формуле

$$\dot{\phi}_i = \frac{d\phi_i}{dt}. \quad (7)$$

Кинетическая (Т) и потенциальная (П) энергии находятся по формулам

$$T = \frac{J}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_i^2, \quad (8)$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n-1} U(\varepsilon_{i+1/2}), \quad (9)$$

где J – момент инерции пластины;

U – упругий потенциал связи.

Функция Лагранжа вычисляется по формуле

$$L = T - \Pi. \quad (10)$$

Зависимость реакции связи от деформации строилась как кусочно-линейная зависимость на основе данных натурных измерений, которые приведены ниже в Таблице 1 и задается уравнением

$$R_{i+1/2} = \frac{dU}{ds_{i+1/2}} = U' * \frac{d\varepsilon_{i+1/2}}{ds_{i+1/2}} = \frac{s_{i+1/2}}{h^2} U'(\varepsilon_{i+1/2}). \quad (11)$$

Таблица 1 - Упругие характеристики связи

ε (%)	0	1.56	31.3	72.9	99.2	125	141	150
N (Н)	0	1.08	2.16	3.24	4.32	5.40	6.48	7.56

Для описания движения системы применим уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

где F_i – обобщенные силы.

Найдём обобщенные силы, входящие в правую часть уравнений (12), вызванные действием на систему вертикальных усилий P_i , горизонтальных усилий Q_i , вращательных моментов M_i и сил контактного взаимодействия между пластинами. Для этого найдем координаты верхних концов пластин по формулам

$$X_i = (i - 1)h_0 + a \cos \varphi_i; \quad (13)$$

$$Y_i = a \sin \varphi_i, \quad (14)$$

где $(i = 1, 2, \dots, n)$.

В соответствии с выражением для виртуальной работы:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n F_i \delta \varphi_i = - \sum_{i=1}^n (Q_i \delta X_i + P_i \delta Y_i - M_i \delta \varphi_i + \eta \dot{\varphi}_i \delta \varphi_i), \quad (15)$$

где η – коэффициент вязкого сопротивления вращению.

Тогда из (13)-(15) для обобщенных сил получим формулу

$$F_i = Q_i a \sin \varphi_i - P_i a \cos \varphi_i + M_i - \eta \dot{\varphi}_i. \quad (16)$$

Подставляя формулы (8)-(10), (6) в (12) имеем

$$J \ddot{\varphi}_i = F_i - \frac{s_{i+\frac{1}{2}}}{h^2} U' \left(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial s_{i+\frac{1}{2}}}{\partial \varphi_i} - \frac{s_{i-\frac{1}{2}}}{h^2} U' (\varepsilon_{i-1/2}) \frac{\partial s_{i-\frac{1}{2}}}{\partial \varphi_i}. \quad (17)$$

Зная (11), получим

$$J\ddot{\varphi}_i = F_i - R_{i+1/2} \frac{\partial s_{i+\frac{1}{2}}}{\partial \varphi_i} - R_{i-1/2} \frac{\partial s_{i-\frac{1}{2}}}{\partial \varphi_i}. \quad (18)$$

Дифференцируя (5), получим формулы

$$s_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial s_{i+\frac{1}{2}}}{\partial \varphi_i} = a(h + a(\cos \varphi_{i+1} - \cos \varphi_i)) \sin \varphi_i + a^2(\sin \varphi_{i+1} - \sin \varphi_i) \times \\ \times \cos \varphi_i, \quad (19)$$

$$s_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial s_{i-\frac{1}{2}}}{\partial \varphi_i} = -a(h + a(\cos \varphi_i - \cos \varphi_{i-1})) \sin \varphi_i + a^2(\sin \varphi_i - \sin \varphi_{i-1}) \times \\ \times \cos \varphi_i. \quad (20)$$

Из (18)-(20) получим развернутую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} J\ddot{\varphi}_i = F_i - R_{i+1/2} \frac{\partial s_{i+\frac{1}{2}}}{\partial \varphi_i} - R_{i-1/2} \frac{\partial s_{i-\frac{1}{2}}}{\partial \varphi_i} \\ s_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial s_{i+\frac{1}{2}}}{\partial \varphi_i} = a(h + a(\cos \varphi_{i+1} - \cos \varphi_i)) \sin \varphi_i + \\ \quad + a^2(\sin \varphi_{i+1} - \sin \varphi_i) \cos \varphi_i \\ s_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial s_{i-\frac{1}{2}}}{\partial \varphi_i} = -a(h + a(\cos \varphi_i - \cos \varphi_{i-1})) \sin \varphi_i + \\ \quad + a^2(\sin \varphi_i - \sin \varphi_{i-1}) \cos \varphi_i \end{array} \right. . \quad (21)$$

Система (21) состоит из (n-1) дифференциальных уравнений второго порядка для степеней свободы $i = 2, 3, \dots, n$. Для $i = 1$ задается условие

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \omega_0 t = \varphi_0 + \frac{(\pi - 2\varphi_0)}{T} t, \quad (22)$$

где ω_0 – угловая скорость.

Это условие означает принудительный разворот первой пластины с постоянной угловой скоростью ω_0 и обеспечивает раскрытие веера за время T .

Предполагается, что конечная пластина в системе связана только с предыдущей пластиной, поэтому справа на неё не действует сила натяжения, т.е.:

$$R_{n+1/2} = 0. \quad (23)$$

Моменты M_i являются заданными функциями углов поворота и угловых скоростей пластин. Они обеспечивают выполнение односторонних ограничений на углы поворота $\varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2} - \varphi_0$, которые реализуются в процессе численного счета с помощью специального алгоритма корректировки решения. Для системы уравнений (18) ставится задача Коши:

$$\varphi_i = \varphi_0 \text{ и } \dot{\varphi}_i = 0 \text{ при } t = 0. \quad (24)$$

Численное решение этой задачи позволяет получить углы наклона пластин веерной системы в зависимости от времени. Таким образом, восстанавливается картина движения веера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. Создана лабораторная физическая модель, представляющая собой систему пластин на плоском основании (станине), которая служит для наглядного представления процесса движения веерной волны;
2. Получена система динамических уравнений веерной системы как механическая система с n степенями свободы (углами наклона пластин).
3. Задача о движении веера сформулирована как задача Коши для $(n - 1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Reches, Z. Nucleation and growth of faults in brittle rocks. / Z. Reches, Lockner D.A. - J.Geophys. Res. – 1994. – Vol. 99, no. B9 – P. 18159-18173.
2. Tarasov, B.G. Frictionless shear at great depth and other paradoxes of hard rocks / B.G. Tarasov, M.F. Randolph. - Int. J. Rock Mech. Min. – 2008. – Vol. 45, no. 3. – P.316-328.
3. Tarasov, B.G. Intersonic shear rupture mechanism / Int. J. Rock Mech. Min. –2008. – Vol. 45, no. 6. – P. 914-928.
4. Stavrogin, A.N. Experimental physics and rock mechanics: results of laboratory studies/ A.N. Stavrogin, B.G. Tarasov. – Lisse/Abingdon/Exton/Tokio: A.A.Balkema Publishers, 2001. – 356 p.
5. Тарасов, Б.Г. Анализ веерных волн в лабораторной модели, имитирующей распространение сдвиговых трещин в горных породах / Б.Г. Тарасов, В.М. Садовский, О.В. Садовская. - Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9, № 1. – С. 38-51